



Concours d'entrée (IG)
Examen de Mathématiques
Barème/80

10 Septembre 2024

Durée : 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4 (la question 5 est obligatoire)

Question 1. (16 points)

Le tableau ci-dessous représente le nombre de vues y_i (en milliers), de cinq premières vidéos publiées par Samir sur Tiktok.

Rang du vidéo : x_i	1	2	3	4	5
Nombres de vues en milliers : y_i	0,9	1,6	4,3	12,1	13,1

- 1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) .
- 2) Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ et placer ce point dans le système précédent.
- 3) Calculer le coefficient de corrélation r . Interpréter le résultat obtenu.
- 4) L'équation de la droite de régression $(D_{y/x})$ de y en fonction de x est : $y = mx - 4,07$ où m est un nombre réel. Montrer en utilisant les résultats de la partie 2), que $m = 3,49$, puis tracer cette droite dans le même repère.
- 5) On suppose que ce modèle reste valable jusqu'à la 10^{ème} vidéo.
 - a- Estimer le nombre de vues de la 6^{ème} vidéo publiée.
 - b- En réalité, 17870 personnes ont regardé la 6^{ème} vidéo. Calculer le pourcentage de l'erreur dans l'estimation précédente.
- 6) D'après quelques influenceurs, Tiktok paie 0,04\$ pour chaque 1000 vues. Samir dit qu'après avoir publié la 7^{ème} vidéo, le solde de son compte dépasse 2,8\$. A-t-il raison ? Justifier.

Question 2. (16 points)

Dans le tableau suivant une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	La valeur de $A = \frac{\ln(\frac{1}{e}) + 2\ln(e\sqrt{e})}{\ln(2e) - \ln(\frac{2}{e^3})}$ est :	2	-1	0,5
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$	1	e^{-1}	$+\infty$
3	Le système d'équations suivant : $\begin{cases} e^{x+1} \times e^{y-1} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y-1) \end{cases}$ admet :	Une seule solution	Pas des solutions	Infinité des solutions
4	Le domaine de définition de la fonction h définie par $h(x) = \ln(2 - \sqrt{x-3})$ est :	$] -\infty ; 7[$	$[3 ; 7[$	$]3 ; 7[$
5	Si $C(x) = x^2(\ln(x) - 1)$ représente le coût total et x est le nombre des objets produit ($x > 0$), alors le cout marginal $C_m(x) =$	$\ln(x) - x$	$2x\ln(x)$	$x(2\ln(x) - 1)$

Question 3. (16 points)

On considère deux urnes U et V.

U contient **une** boule numérotée **7** et **trois** boules numérotées **2**

V contient **trois** boules numérotées **4** et **deux** boules numérotées **2**.

1) On tire au hasard une boule de chaque urne.

a- Calculer la probabilité d'obtenir une somme impaire.

b- Démontrer que la probabilité d'obtenir une somme qui est multiple de 3 est $\frac{11}{20}$.

2) Dans cette partie, on choisit une des deux urnes :

- Si l'urne choisie est U, on tire simultanément et au hasard deux boules.
- Sinon, on tire successivement sans remise deux boules.

On considère les évènements suivants :

E: «L'urne U est choisie» ;

F: «L'urne V est choisie» ;

G: «La somme obtenue est inférieure à 7» ;

H: «La somme obtenue est inférieure à 6» .

a- Calculer $p(G/E)$. Déduire $p(G \cap E)$.

b- Calculer $p(G \cap F)$ et déduire $p(G)$.

c- La somme des nombres est au moins 7. Quelle est la probabilité qu'on a choisi l'urne U ?

d- Calculer $p(H)$.

Question 4. (16 points)

On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - x^2 - \ln(x - 1)$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) Montrer que g est strictement décroissante et dresser le tableau de variations de g.

3) Calculer $g(2)$. Déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction h définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} - x$ et soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$. Déduire une asymptote à (C_h) .

2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et montrer que la droite d'équation (d) : $y = -x$ est une asymptote à (C_h) .

b- Discuter, suivant les valeurs de x, la position relative entre (C_h) et (d).

3) Montrer que $h'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$, puis dresser le tableau de variation de h(x).

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_h) au point d'abscisse e + 1.

5) Tracer (d), (T) et (C_h) .

(N.B : la question 5 est obligatoire)

Question 5. (32 points)

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 + x)e^{-x+2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(5)$.
- 2) Montrer que (C) est au-dessus de l'axe $(x'ox)$ pour toutes x dans $[0; +\infty[$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Déduire une asymptote à (C) .
- 4) Montrer que $f'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x+2}$, puis dresser le tableau de variation de f .
- 5) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en O .
- 6) Tracer (T) et (C) .

Partie B :

Une usine produit certains objets d'un prix unitaire x exprimés en centaines de millions de L.L tel que $0,1 \leq x \leq 8$. Les fonctions de demande et d'offre exprimées en milliers d'unités, sont données par : $d(x) = (x + 1)e^{-x+2}$ et $o(x) = \frac{10}{e^{x-1}}$ respectivement.

(Le prix unitaire est le prix de 1000 objets).

- 1) Calculer le nombre d'objet demandé pour un prix unitaire de 400 000 000 L.L.
- 2) Calculer le prix unitaire pour un offre de 3260 objets.
- 3) a- Résoudre l'équation $d(x) = o(x)$.
b- Déduire le prix d'équilibre en LL, puis trouver le nombre d'objets correspondant.
- 4) a- Vérifier que la fonction $f(x)$ représente le revenu, en centaines de millions de L.L, obtenus de la vente de la quantité demandée avec $0,1 \leq x \leq 8$.
b- Pour quel prix unitaire, le revenu est maximum ? Calculer dans ce cas le prix d'un objet en L.L.
- 5) a- Montrer que l'élasticité de la demande est donnée par : $E(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
b- Calculer $E(1,5)$. Interpréter économiquement le résultat.
c- Le tableau ci-contre représente le tableau de variation de l'élasticité $E(x)$.
Pour quelles valeurs de x , la demande est élastique ? Justifier.

x	0,1	1,62	8
E(x)	0,01	1	7,11