

Concours d'entrée (IG)
Examen de Mathématique

22 Septembre 2023

Durée : 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4 (la question 5 est obligatoire)

Question 1. (16 points)

Le tableau ci-dessous montre une estimation du nombre, en milliers, d'immigrants Libanais (y_i) de Juillet 2022 à Décembre 2022, et le rang du mois correspondant (x_i).

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
Rang du mois : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombres d'immigrants (en milliers) : y_i	3	3,5	4,2	5,3	6,5	7,9

- Déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre d'immigrants entre juillet et décembre.
- Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i)
- Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ et placer ce point dans le système précédent.
- Trouver la covariance entre x et y . La relation qui relie x et y est-elle positive ou négative ?
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire et donner une interprétation de sa valeur.
- Déterminer une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) de y en fonction de x ; tracer cette droite dans le système précédent.
- Supposons que le modèle ci-dessus reste valable jusqu'à l'année 2023.
 - Estimer les nombres d'immigrants en Février 2023.
 - Déterminer le mois dans lequel le nombre d'immigrants libanais dépasse 11 000 pour la première fois.

Question 2. (16 points)

Une entreprise produit un certain type d'objets. La fonction de demande et la fonction d'offre sont modélisées respectivement par : $D(p) = \frac{2}{2 + e^{p-1}}$ et $O(p) = \frac{2e^{p-1}}{2 + e^{p-1}}$ où p est le prix unitaire exprimé en millions LL. $D(p)$ et $O(p)$ sont exprimées en milliers d'objets avec $p \in]0;5]$.

- Calculer le nombre d'objets demandés pour un prix unitaire de 2 millions LL.
- Calculer le prix unitaire pour une offre de 1000 objets.
- Déterminer le prix d'équilibre.
- On désigne par $e(p)$ l'élasticité de la demande par rapport au prix unitaire p .
 - Montrer que $e(p) = \frac{-pe^{p-1}}{2 + e^{p-1}}$ et calculer $e(2)$.
 - Si le prix unitaire de 2 millions LL augmente de 1 %, calculer alors le nombre d'objets demandés.

Question 3. (16 points)

Choisissez, après justification, la réponse correcte pour les questions suivantes :

- 1) Le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\ln(x+3)}{x-2}$ est :
 - a- $] -3; 2[\cup] 2; +\infty[$
 - b- $] -3; +\infty[$
 - c- $] -3; 2[$.
- 2) La solution de l'équation $\ln^2(x) + 5\ln(x) + 4 = 0$ est :
 - a- $S = \{e^{-1}\}$
 - b- $S = \{e^{-4}; e^{-1}\}$
 - c- $S = \{e^{-4}\}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \ln(x)}{x} - 1 \right) =$
 - a- -1
 - b- $+\infty$
 - c- 0.
- 4) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln^2(x) + 1$ et l'expression $A = f'(e^{-1}) + \ln(7 - 4\sqrt{3}) + \ln(7 + 4\sqrt{3})$. La valeur de l'expression A est :
 - a- 0
 - b- -1
 - c- 1.

Question 4. (16 points)

Une boulangerie propose trois types de pâtisseries : Croissants, Muffins et Danoises. Chaque pâtisserie est composée d'une combinaison de trois ingrédients principaux : la farine, le sucre et le beurre. Les ingrédients nécessaires et le coût (**en millions de LBP**) de production d'un lot de chaque type sont indiqués dans le tableau suivant :

Lot	Farine (en sachets)	Sucre (en sachets)	Beurre (en sachets)	Coût par lot
Croissants	2	1/2	1/2	4
Muffins	1	1/4	1/8	3
Danoises	3	1	1/2	2.5

Supposons que la boulangerie dispose des quantités d'ingrédients suivantes : 25 sacs de farine, 7 sacs de sucre et 5 paquets de beurre. Soit x , y et z respectivement le nombre de lots produits de croissants, muffins et danoises.

- 1) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le texte ci-dessus.
- 2) En résolvant le système précédent, déduire le nombre de lots de chaque type.
- 3) Trouver le coût total des lots produits.
- 4) Le prix de vente par lot de chaque type est calculé en mettant au carré le coût par lot puis en le divisant par 2. Trouvez le bénéfice réalisé.

N.B : La question 5 est obligatoire

Question 5. (32 points)

Partie A : Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{x-3}{8}e^x$.

1) Démontrer que $g'(x) = \frac{1}{8}(x-2)e^x$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction g et vérifier que $g(x) > 0$ pour tout x dans $[0; +\infty[$

Partie B : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x-4}{8}e^x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et calculer $f(0)$, $f(4)$.

2) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

4) Tracer (C) et (T) .

5) La droite (d) d'équation $y = \frac{9}{8}x$ coupe (C) en deux points d'abscisses respectives α et β ($\alpha < \beta$). Tracer (d) dans le même repère que (C) et vérifier que $0,7 < \alpha < 0,9$.

Partie C : (Dans cette partie $\alpha = 0,813$ et $\beta = 3,919$)

Une entreprise fabrique des objets. Le coût total de fabrication, exprimé en millions de LL, est modélisé par $f(x) = x + 1 + \frac{x-4}{8}e^x$ où x est le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers avec $0 \leq x \leq 4$.

1) Calculer les coûts fixes.

2) Calculer le coût marginal de fabrication de 2000 objets. Donner une interprétation économique de ce résultat.

3) Chaque objet fabriqué est vendu à 1125 LL et on suppose que la fabrication est vendue en sa totalité.

a- Vérifier que la fonction du revenu est donnée par $R(x) = \frac{9}{8}x$.

b- Pour quels niveaux de production l'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ? Justifier la réponse.