



14 Septembre 2022

Durée : 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4 (la question 5 est obligatoire)

Question 1. (15 points)

Monsieur X part en voyage et souhaite louer une voiture. Il doit décider auprès de quelle agence louer une voiture. L'agence A facture 1 million plus 5 000 LBP pour chaque kilomètre parcouru. L'agence B facture 0,5 million plus 10 000 LBP par kilomètre. L'agence C facture 30 000 LBP pour chaque kilomètre coupé. Notons x la distance parcourue et par $f_A(x)$, $f_B(x)$ et $f_C(x)$ les frais, en LBP, de location d'une voiture pour une journée auprès de trois agences de location A, B et C respectivement.

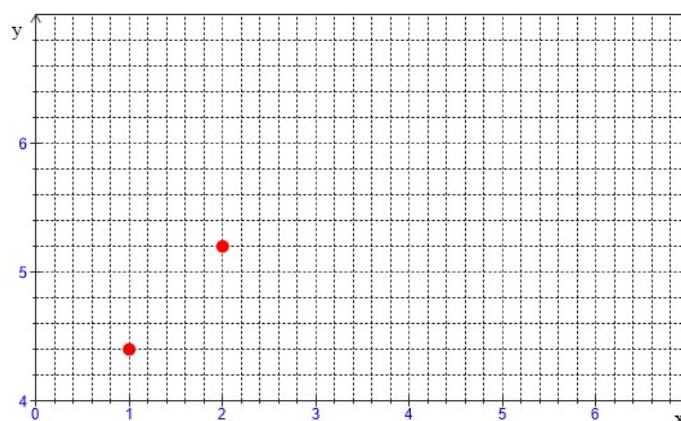
1. Vérifiez que le coût, en milliers de LBP, de la location d'une voiture auprès de l'agence A est $f_A(x) = 1000 + 5x$. Déduire les expressions de $f_B(x)$ et $f_C(x)$.
2. Pour quelles valeurs de x , l'agence A facture plus que l'agence B.
3. Le trajet de Monsieur X est compris entre 20 et 25 km, quelle agence vous conseillez-vous ?

Question 2. (15 points)

L'inflation et la détérioration de la valeur de la monnaie libanaise ont provoqué une instabilité des prix de l'essence sur le marché libanais. En fait, le tableau suivant montre les prix des réservoirs d'essence (benzène) (en 100 000 LBP) sur 6 mois à partir d'avril 2022.

Mois	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre
Rang du mois : x_i	1	2	3	4	5	6
Prix du réservoir d'essence : y_i	4,4	5,2	6,2	6,6	6,2	6,3

1. Représenter, sur la même figure ci-dessous, le nuage de points (x_i, y_i) ainsi que le centre de gravité $G(\bar{X}, \bar{Y})$. Que pouvez-vous remarquer ?



2. Trouvez la covariance entre x et y . x et y sont-ils positivement liés ?
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et donner une interprétation de sa valeur.
4. Déterminer une équation de la droite de régression $(D_{Y/X})$ de y en fonction de x ; tracer cette droite dans le système précédent.

5. Supposons que le modèle ci-dessus reste valable pour les mois à venir de l'année 2022. Trouvez une estimation du prix du réservoir d'essence au cours du mois de novembre.
6. Le Trésor libanais perçoit sur chaque réservoir une taxe de 11% plus 5000 LBP. On estime que le marché libanais consomme 9 millions de réservoirs par mois. Estimez le revenu total qui sera apporté au trésor public au cours du mois de novembre.

Question 3. (15 points)

Choisir, après justification, la bonne réponse aux questions suivantes :

1. On donne $A = \sqrt{\ln(\sqrt{5} - 2) + \ln(\sqrt{5} + 2)}$. Après simplification on a :
 - a. $A = 0$
 - b. $A = \sqrt{2 \ln(\sqrt{5})}$
 - c. A n'est pas définie
 - d. $A = \ln 2$
2. Une usine produit quotidiennement une quantité x d'un certain produit. Le coût total C de production est modélisé par $C(x) = 0,8x + 1 + 4xe^{-2x}$, $x \in [0, 6]$ x est exprimé en centaines de kg et $C(x)$ en millions LL). L'ensemble de la production est vendu au prix de 18 000 LBP le kg. Alors la fonction de profit est donnée par :
 - a. $P(x) = -x + 1 + 4xe^{-2x}$
 - b. $P(x) = 0,8x - 0,8 - 4xe^{-2x}$
 - c. $P(x) = x - 1 - 4xe^{-2x}$
 - d. $P(x) = 1,8x$
3. Soit x et y les deux variables statistiques (linéairement liées). La droite de régression de y sur x est donnée par $y = 0,5x - 1,5$: L'une des affirmations suivantes est vraie :
 - a. La covariance entre x et y est négative.
 - b. La droite de régression est décroissante.
 - c. La droite de régression de x sur y est : $x = 3 + 2y$.
 - d. Le coefficient de corrélation est positif.
4. Qu'est-ce que $\sqrt{16\%}$?
 - a. 4%
 - b. 40%
 - c. 0%
 - d. 2.5%
5. Le coût marginal (dérivée du coût) de production dans une certaine usine est modélisé par $M_C(x) = (x + 1)e^{x-1}$. Alors, un coût total peut être donné par :
 - a. $C(x) = e^{x-1}$
 - b. $C(x) = (x - 1)e^{x-1}$
 - c. $C(x) = (x - 1)e^{x-2}$
 - d. $C(x) = xe^{x-1}$

Question 4. (15 points)

Une boîte B contient des boules selon ce qui suit :

- 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3.
- 4 boules bleues numérotées 3, 3, 4 et 4.

Deux boules sont sélectionnées au hasard du boîte. On considère les événements suivants :

- A "Toutes les boules sélectionnées sont rouges"
- B "une seule boule est rouge".
- C "les boules ont le numéro 3".

- D “La somme des numéros sur les deux boules est 6”.
- E “les deux boules ont un numéro pair”.
- F “les deux boules sont bleues avec des numéros pairs”.

1. Trouver les probabilités des événements A, B, C, D, E et F.
2. Vérifier que $P(B / C) = \frac{2}{3}$.

N.B : La question 5 est obligatoire

Question 5. (30 points)

Partie A : Soit la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$, par $f(x) = \frac{2e^{-x+1} - 1}{4e^{-x+1} + 2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **Utiliser l'échelle 1 unité = 2 cm.**

1. Compléter le tableau suivant : (**Arrondis votre réponse à 10^{-5} près**).

x	0	1,5	$\ln 2 + 1$	2,5	3
$f(x)$					

2. Vérifiez que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \frac{2}{2 + e^{x-1}} - \frac{1}{2}$.
3. Trouver la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Déduire une équation de l'asymptote à (C) .
4. Montrer que la dérivée de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{-2e^{x-1}}{(2 + e^{x-1})^2}$. **Utiliser la partie 2.**
5. Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) en $x = 0$.
6. Dresser le tableau de variations de f .
7. Tracer (T) et (C) .

Partie B : (Dans cette partie, certaines terminologies économiques sont mentionnées. Leurs définitions sont données dans le tableau ci-dessous).

Chaque année, l'usine X produit des systèmes d'alimentation sans coupure (UPS) pour répondre à la demande intérieure d'électricité due à la pénurie d'énergie. La différence entre la fonction de demande $D(p)$ et la fonction d'offre $O(p)$ est définie par : $D(p) - O(p) = f(p)$, où f est la fonction donnée dans la partie A. On note que, p est le prix unitaire en millions de livres libanaises (LBP) avec $p \in [1, 4]$, $D(p)$ et $O(p)$ sont exprimés en centaines de milliers d'unités.

1. Chaque UPS est vendue à 2,5 millions de LBP. Le marché souffre-t-il d'un excès d'offre ou d'un excès de demande ?
2. Trouver le prix d'équilibre du marché.
3. Supposons que l'usine fournisse 50 000 unités par an (quantité fixe).
 - a. Vérifier que $D(p) = \frac{2}{2 + e^{p-1}}$.
 - b. Trouver l'expression de l'élasticité de la demande $E(p)$ par rapport au prix p . Déduire la valeur de $E(1,5)$.
 - c. Donner l'interprétation économique de $E(1,5)$.

<u>Indices</u>	Le prix d'équilibre du marché est lorsque $D(p) = O(p)$	Elasticité $E(p) = -p \frac{D'(p)}{D(p)}$
-----------------------	---	---