

Concours d'entrée (IG)
Mathématiques

14 septembre 2021

Durée : 2 heures

N.B. : Choisir 3 exercices parmi les exercices 1, 2, 3, 4 (l'exercice 5 est obligatoire).

Exercice 1 (16 Pts)

Chaque semaine, le propriétaire d'une pâtisserie achète 400 kg de farine, 200 kg de sucre et 50 kg de beurre au prix de 550 mille livres libanaises (LBP), en sachant que le sucre coûte deux fois le prix de la farine. Après la détérioration économique, la farine a maintenu le même prix tandis que les prix du sucre et du beurre ont augmenté respectivement de 10 et 12 fois. Le coût d'achat des mêmes quantités de farine, de sucre et de beurre est devenu 4,35 millions LBP. L'objectif est de trouver les prix initiaux de la farine, du sucre et du beurre.

1. Construire le système d'équations correspondant à ce qui précède.
2. Résoudre le système (vous pouvez utiliser la calculatrice)
3. Le propriétaire a acheté, pendant la crise économique, 200 kg de farine, 100 kg de sucre et 25 kg de beurre. Calculez la somme totale payée.

Exercice 2 (16 Pts)

Le tableau ci-dessous montre le nombre d'audience Y , en milliers, d'une certaine station de radio FM au cours des années 2016-2021.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Le nombre d'audience : y_i	50	52	53	63	69	70

1. Représenter le nuage de points des couples $(x_i; y_i)$ dans un système orthogonal ainsi que le centre de gravité $G(\bar{X}, \bar{Y})$. Que pouvez-vous remarquer ?
2. Trouver la covariance entre x et y . La relation entre x et y est-elle positive ou négative ?
3. Calculer le coefficient de corrélation et donner une interprétation du résultat.
4. Donner une équation de la droite de régression $(D_{Y/X})$ de y en fonction de x ; Dessiner la sur le même système.
5. Supposons que le modèle ci-dessus reste valable jusqu'en 2024. Trouvez une estimation du nombre d'audiences en 2022. Trouver le pourcentage d'augmentation estimé de l'audience.

Exercice 3 (16 Pts)

Le personnel d'une radio FM est composé de 25 employés répartis en 3 catégories : Animateurs, Directeurs de programmes et Techniciens. 48 % du personnel sont des Animateurs et 24 % sont des Directeurs de programme. 75% des Animateurs sont des femmes et tous les Techniciens sont des hommes. 52% du personnel sont des femmes.

1. Copiez et remplissez le tableau suivant :

	Animateurs	Directeurs de programmes	Techniciens	Total
Hommes				
Femmes				
Total				25

2. Un groupe formé de 5 personnes doit être envoyé aux Conférences Mondiales des Radiocommunications pour représenter la station de radio. De combien de manières différentes le groupe peut-il être formé :
 - a. Sans aucune restriction.
 - b. Seules les femmes sont prises en compte dans la délégation.
 - c. Des employés de la même catégorie sont choisis.
 - d. 2 Animateurs, 2 Directeurs de programmes et 1 Technicien.
 - e. Au moins 4 animateurs et sans choisir des hommes dans la délégation.
3. Une personne est choisie au hasard parmi le personnel de la radio. Quelle est la probabilité que la personne sélectionnée soit un « homme directeur de programme », ou une « femme animatrice » ?

Exercice 4 (16 Pts)

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int (x + 1 + \sqrt{x}) dx \qquad 2. \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad 3. \int \frac{e^x - 1}{e^x - x + 1} dx$$

$$4. \int \frac{6x}{x^2 + 4x - 5} dx \text{ (Indication : Trouver A et B tels que } \frac{6x}{x^2 + 4x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 5} \text{)}$$

Exercice 5 (32 Pts, obligatoire)

Partie A: On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + 2e^{-x} - e^{-2x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Déduire l'équation d'une asymptote à (C).
2. Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme $f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$.
3. Montrer que (C) admet une tangente horizontale en un point A dont les coordonnées sont à déterminer.
4. Dresser ensuite le tableau de variation de f .
5. Sachant que la droite (d) : $y = x$ coupe la courbe (C) en un point d'abscisse α , vérifiez que $1.41 < \alpha < 1.43$.
6. Tracer (d) et (C).

Partie B. Dans cette partie, quelques terminologies économiques sont mentionnées. Notez que leurs définitions sont données dans le tableau ci-dessous. De plus, prenez $\alpha \approx 1.42$.

Une usine produit des barres de chocolat pour répondre à la demande du marché local. Les fonctions de demande et d'offre mensuelles sont modélisées par : $D(p) = 1 + 2e^{-p} - e^{-2p}$ et $S(p) = p$, où p est le prix unitaire en milliers de livres libanaises (LBP) tel que $p \in [1, 6]$. $D(p)$ et $S(p)$ sont exprimés en millions de barres.

1. La barre de chocolat est vendue 1500 LBP.
 - a. Calculer la quantité demandée. En déduire, dans ce cas, le revenu produit.
 - b. Quel est le montant de l'offre excédentaire (Ou la surproduction) ?
2. Déterminer le prix d'équilibre du marché et la quantité d'équilibre correspondante.
3. Désignons par $E(p)$ l'élasticité de la demande par rapport au prix p .
 - a. Trouver l'expression de $E(p)$. Déduire la valeur de $E(1.5)$.
 - b. Donner l'interprétation économique de $E(1.5)$.
4. En raison de la crise économique à laquelle fait face le Liban, le prix de la barre de chocolat est augmenté de 1500 à 6000 LBP. Trouver le pourcentage de réduction de la demande.

Indications	Surproduction = Offre - Demande	Le prix d'équilibre du marché est obtenu lorsque $D(p) = S(p)$	L'élasticité $E(p) = -p \frac{D'(p)}{D(p)}$
--------------------	--	--	---

Bon Travail