Université Libanaise
Faculté de Technologie

الجامعة اللبنانية
كلية التكنولوجيا

الجامعة اللبنانية

Mathématiques (IG), Durée : 2 heures
Concours d'entrée : 16 septembre 2020

N.B. : Choisir 3 exercices parmi les exercices 1, 2, 3, 4,5 (l'exercice 6 est obligatoire).

Exercice 1 (16 Pts)

Une personne dépose à une banque, au début de Janvier 2010, la somme de 4,200,000LL. Le taux d'intérêt annuel donné par la banque est de 6%. La banque facture 36 000LL chaque année en tant que commission annuelle. Notons S_n le montant que la personne possèdera au premier Janvier de l'année $2010 + n$. Soit $S_0 = 4{,}200{,}000LL$.

1. Vérifier que $S_1 = 4416000$.
2. Montrer que $S_{n+1} = 1.06S_n - 36000$ pour tout n.
3. On suppose que $T_n = S_n - 600000$.
   a. Montrer que (T_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme T_0 et la raison q.
   b. Exprimer T_n en fonction de n et déduire que $S_n = 3600000 \times (1.06)^n + 600000$.
   c. Au début de quelle année la personne possèdera une somme qui dépasse 8000000LL pour la première fois ?
4. Calculer $C = S_0 + S_1 + \cdots + S_7$ et déduire les intérêts gagnés par cette personne pendant les 8 premières années.

Exercice 2 (16 Pts)

On considère la suite (U_n) de définie par : U_1=12 et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 5$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4.
2. Soit la suite (V_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par : $V_n = U_n - \frac{15}{2}$.
   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 1/3.
   b. Exprimer V_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (V_n) puis déduire la limite de la suite (U_n).
3. Est-il possible de déterminer n de sorte que: a) $U_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6}$ b) $U_n - \frac{15}{2} \geq 10^{6}$?

Exercice 3 (16 Pts)

Le tableau ci-dessous montre le prix (**en milliers de LL**) de m^3 d'eau dans une ville entre l'année 2002 et 2006:

Année	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Prix de m^3 d'eau y_i	2.64	2.76	2.81	2.95	3.39

1. Représenter le nuage de points des couples $(x_i; y_i)$ dans un système orthogonal.
2. Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Tracer le point moyen G.
3. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en fonction de x. Dessiner (D).
4. Estimer le prix du m^3 d'eau en 2010.
5. À partir de quelle année le prix du m^3 d'eau dépassera-t-il 5000LL?

Exercice 4 (16 Pts)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int (3x+2)^{10} dx$ 2. $\int \frac{4+\ln x}{x} dx$ 3. $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+1} dx$ 4. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ (intégration par partie)

Exercice 5 (16 Pts)

Les employés d'une école sont composés de 3 catégories : administratifs (A), enseignants (T), et ouvriers (E).

- 10% des employés sont administratifs et 50% sont des enseignants.
- 80% des administrateurs sont des hommes (M) et 60% des enseignants sont des femmes (F), et 67,5% des ouvriers sont des hommes.

Nous choisissons au hasard un employé de cette école.

1. Donner l'arbre de probabilité de ce problème et préciser les différentes valeurs de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'employé choisi soit une femme administrative.
3. Trouver la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit une femme.
4. L'employé choisi est une femme. Calculer la probabilité que cet employé appartienne à la catégorie (E).
5. Les directeurs de l'école décident d'augmenter le salaire des employés comme suit :
   - 100 000 LL pour chaque employé de (A) ;
   - 80 000 LL pour chaque salariée de (T) et en plus, 20 000 LL pour chaque femme de (T) ;
   - 60 000 LL pour chaque employé de (E) et en plus, 20 000 LL pour chaque homme de (E).

   Soit X l'augmentation des salaires. Démontrer que X a 3 valeurs possibles et donner la loi de probabilité de X.

Exercice 6 (32 Pts, obligatoire)

Partie A : On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x} + x + 1.5$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer ensuite que la droite (d) d'équation $y = x + 1.5$ est une asymptote à (C) lorsque x tend vers $-\infty$. Étudier la position relative de (C) par rapport à (d).
3. Montrer que $f'(x) = (e^{x} - 1)^2$. Dresser ensuite le tableau de variation de f.
4. Tracer (d) et (C).
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in]1.2; 1.3[$.
6. Calculer l'aire de la surface délimitée par (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$.

Partie B - Choisir cette Partie OU la Partie C : (prendre α=1.25) Soit x le nombre d'articles, exprimé en **milliers**, produits par une usine, et soit $f(x)$ le coût total de production ($x \geq 0$), en **millions** de LL. Chaque article est vendu à 1000LL.

7. Pour quelle valeur de x le coût est 2000000LL ?
8. Exprimer le revenu $R(x)$ en millions de LL.
9. Montrer que le gain de l'usine $P(x)$, exprimé en millions de LL, est donné par $P(x) = -\frac{1}{2}(e^{x} - 1)(e^{x} - 3)$.
10. Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalisera-t-elle un profit ?
11. Pour quelle valeur de x l'entreprise réalisera-t-elle un profit maximum ? Trouver ce maximum.

Partie C : Choisir cette Partie OU la Partie B :

7. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et montrer que $(\ln 2 - 0.5; \ln 2)$ appartient à (C') la courbe de f^{-1}.
8. Résoudre l'équation $f(x)$-x=0 (On peut prendre $e^{x} = y$).
9. Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse ln 2.
10. Etudier la concavité de f et montrer que (C) admet un point d'inflexion à déterminer.

Bonne chance