Université Libanaise
Faculté de Technologie

الجامعة اللبنانية
كلية التكنولوجيا

Concours d'entrée: Mathématiques - IG

25 Juillet 2018 **Durée: 2 heures**

Toutes les questions sont obligatoires

Exercice I (20 points)

Partie A

On considère la suite, (u_n), définie par $u_0 = 900$ et $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Monter que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 500$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.
   b) Prouver que $u_n = 400 \times (0{,}6)^n + 500$.
   c) Etudier les variations de la suite (u_n).
   d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Partie B

Dans un pays donné, deux entreprises A et B partagent le marché des communications. Les clients choisissent, le 1er janvier, soit A soit B, avec un contrat d'un an à la fin duquel ils seront libres de choisir à nouveau A ou B.

Les sociétés A et B disposent de 90% et de 10% du marché respectivement. Nous estimons que, chaque année, 20% des clients de A changent en B, tandis que 20% des clients de B changent en A.

Considérons une population qui est représentée par 1000 clients en l'an 2000. Dans cette année, 900 clients sont inscrits en A et 100 clients sont inscrits en B.

Nous souhaitons étudier l'évolution de cette population dans les années à venir.

1) Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001.
2) Calculer le nombre des clients de B en 2002.
3) On note a_n le nombre des clients de A dans l'année $(2000 + n)$.
   a) Etablir que $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200$.
   b) En utilisant les résultats obtenus de la **partie A**, en quelle année le nombre de clients de la société B dépasse 400?

Exercice II (20 points)

Une usine produit des écrans plasma. Avant d'être proposé à la vente, chaque écran subit un test.

Si le test est positif, c'est-à-dire si l'écran fonctionne bien, il sera proposé à la vente.

Si le test est négatif, l'écran sera réparé avant de subir un autre test. Si le second test est positif, l'écran sera proposé à la vente, sinon, il sera détruit.

On admet que :

- pour 70% des écrans, le premier test est positif;
- pour 65% des écrans réparés, le second test est positif.

On note les événements suivants:

- T : "le premier test est positif " ;
- C : "l'écran est proposé à la vente".

1) On choisit au hasard un écran à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des événements T et C.

2) L'écran est proposé à la vente. Quelle est la probabilité qu'il soit issu d'un premier test positif ?

3) Le coût de production d'un écran est de **1000** \$ avec un supplément de **50** \$ s'il a besoin de réparation. Chaque écran est vendu à $\boldsymbol{d}$ \$, avec $\boldsymbol{d}$ un réel positif. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif, négatif ou nul) réalisé par l'usine pour la vente d'un écran.

a) Vérifier que les trois valeurs possibles de X sont : $\boldsymbol{d-1000}$, $\boldsymbol{d-1050}$ et $\boldsymbol{-1050}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Démontrer que l'espérance mathématique est $E(X) = 0.895\boldsymbol{d} - 1015$

d) A partir de quelle valeur de $\boldsymbol{d}$, l'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices?

Exercice III (28 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - \frac{4}{e^{2x}+1}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (**unité graphique 2 cm**).

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire les asymptotes de (C).

2) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3) La courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse $x = 0$. Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) en ce point.

4) **a)** Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Tracer (T) et (C).

5) **a)** Vérifier que $f(x) = -1 + \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$. Déduire une primitive F de f.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.

6) La fonction f admet une fonction réciproque g, on désigne par (G) sa courbe représentative.

a) Préciser le domaine de définition de g.

b) Montrer que (G) admet un point d'inflexion J, dont on déterminera les coordonnées.

c) Tracer (G) dans le même repère que (C).

d) Déterminer $g(x)$ en fonction de x.

Exercice IV (12 points)

Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ **2)** $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$ **3)** $\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx$ **4)** $\int xe^{-x}dx$