UNIVERSITE LIBANAISE
Institut Universitaire de Technologie

الجامعة اللبنانية
المعهد الجامعي للتكنولوجيا

Concours d'entrée : 11 Septembre 2014
Mathématiques : IAG **Durée : 2heures**

N.B. : Choisir 3 exercices parmi les exercices 1, 2, 3 et 4

Exercice 1. (12 Pts)

On dispose de deux urnes U et V :

U contient **cinq** boules : **trois** boules numérotées 0 et **deux** boules numérotées 1.
V contient **cinq** boules numérotées de 1 à 5.

A - On tire au hasard **une** boule de chaque urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1. Démontrer que $P(X = 0)$ est égale à 3/5.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

B - Dans cette partie on place les **dix boules** des urnes U et V dans une même urne W.
On tire simultanément et au hasard **deux** boules de l'urne W.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On désigne par q le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.
   a) Montrer que la probabilité $P(q = 0)$ est égale à 8/15.
   b) Calculer la probabilité $P(q < 4)$.

Exercice 2. (12 Pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du salaire (y) d'un ouvrier en centaine de milliers de livres libanaises depuis 2010.

Date	1/7//2011	1/7/2012	1/7/2013	1/7/2014	1/7/2015	1/7/2016	1/7/2017
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Salaire : y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44

1. Représenter le nuage de points associé à la série dans un repère orthogonal (1 cm représente 1 rang en abscisse et 5 cm représentent 100000 L.L. en ordonnée, faire débuter la graduation à 6 sur l'axe des ordonnées).
2. Donner une équation de la droite de régression de **y** en **x** par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-2} près).
   Tracer cette droite dans le repère précédent.
3. La forme du nuage suggère une modification de l'évolution du salaire (y) à partir de juillet 2014. Pour $x \geq 4$, on choisit d'ajuster le nuage de points par une courbe (C) d'équation :
   $y = a\ln(x-3) + b$ où a et b sont deux réels.
   a) Déterminer les réels a et b tels que la courbe (C) passe par les points de coordonnées (4 ; 7,61) et (7 ; 8,44) (arrondir les réels a et b à 10^{-2} près).
   b) Tracer la courbe (C) dans le repère précédent.
4. Sami est un jeune salarié, rémunéré au salaire (y). Il souhaite estimer la valeur du salaire (y) au 1^er^ juillet 2019. Quel est, parmi les modèles utilisés aux questions **2** et **3**, celui qui lui sera le plus favorable ?

Exercice 3. (12 Pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
2. Soit la suite (v_n), définie pour tout entier $n \geq 1$, par : $v_n = u_n - \frac{15}{2}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1/3.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis déduire la limite de la suite (u_n).
3. Est-il possible de déterminer n de sorte que : a) $u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6}$? b) $u_n - \frac{15}{2} \geq 10^{6}$?

Exercice 4. (12 Pts)

Un appartement vaut 100 MLL au 1/1/2014. Son prix progresse chaque année de 4%.

1. Quel sera son prix aux dates suivantes : a) 1/1/2015 ? ; b) 1/1/2016 ?
2. On pose $U_0 = 100$ et on désigne par U_n le prix de l'appartement à l'année (2014+n).
   a) Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n et déduire que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer U_n en fonction de n.
   c) Au bout de combien d'années le prix de l'appartement aura doublé ?
3. Cet appartement est loué à 300.000LL/mois. Le montant du loyer est fixe. Le propriétaire a la possibilité de vendre cet appartement à 100MLL et de placer ce capital à la banque à un taux d'intérêt de 6,5%. Quelle option est la plus profitable au bout de :
   a) 5 ans ? b) 10 ans ?

N.B. : Les exercices 5 et 6 sont obligatoires

Exercice 5. (24 Pts)

On donne la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln[2x/(2x+1)]$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A- 1.- a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire l'asymptote (D) à (C).

b) Vérifier que $[2x/(2x+1)] < 1$ et déduire la position de (C) par rapport à (D).

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer (D) et (C).

B- Une étude du marché a montré que :

- La quantité d'objets produits par une entreprise est modélisée par la fonction f.
- La quantité d'objets demandés à cette entreprise est modélisée par la fonction $g(x) = 2x + 1$.
- f (x) est la quantité d'objets produits par cette entreprise exprimée en millier. x est exprimée en semaines ($1 \leq x \leq 10$) et g(x) est la quantité d'objets demandés exprimée en milliers.

1. On dit que « demande est satisfaite à la date x » si $f(x) \geq g(x)$.
   Montrer que la demande n'est jamais satisfaite.
2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre deux dates n et m est donné par $\int_n^m [g(x) - f(x)]dx$.
   a) Déterminer la fonction H(x) primitive de $[g(x) - f(x)]$ sur $]0; +\infty[$.
   b) Calculer le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite pour n = 1 et m = 5.

Exercice 6. (10 Pts)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-5, 6] qui admet des primitives sur cet intervalle. Ci-contre on donne le tableau de variations de f.

x	-5		-3		2		4		6
$f(x)$	3	↘	1	↗	4	↘	-2	↗	0

Dans chacun des cas suivants, choisir et justifier l'unique bonne réponse :

1. Si a et b sont deux réels tels que $2 < a < b < 4$ alors :
   a) $f(a) > f(b)$; b) $f(a) < f(b)$; c) on ne peut pas comparer f(a) et f(b)
2. Le nombre de solutions, sur [-5, 6], de l'équation $f(x) = 1$ est : a) 1 ; b) 2 ; c) 3
3. a) $\int_4^5 f(x)dx < 0$; b) $\int_4^5 f(x)dx > 0$; c) le signe de $\int_4^5 f(x)dx$ n'est pas déterminé
4. Si g est la fonction définie sur [-5, 6] par $g(x) = -1 + x/2$ alors l'équation $f(x) = g(x)$:
   a) n'a pas de solution ; b) a une unique solution ; c) On ne peut pas se prononcer.