



Concours d'entrée - Génie

Mathématiques

09 Septembre 2025

(Barème/50)

Durée: 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4.

La question 5 est obligatoire.

Question 1. (10 points)

Dans le tableau suivant, une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	On donne : $a = 8 + \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) - 3 \ln(e^2)$ et $b = \ln(\sqrt{9+e} - 3) + \ln(\sqrt{9+e} + 3)$ Alors :	$a = b$	$a > b$	$a < b$
2	Soit $X = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x \ln x)$ et $Y = e^{3 \ln x}$ Alors :	$Y = 6$	$Y = 8$	$Y = 0$
3	Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(-x^2 + 1)$ est :	$] -1; 1 [$	$] -1; +\infty [$	$] -\infty; -1 [\cup] -1; +\infty [$
4	$\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} \frac{x}{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)} dx =$	$2 \ln(2)$	$\ln \sqrt{2}$	0,3

Question 2. (10 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A (4 ; 2 ; 0), B (2 ; 3 ; 1) et C (2 ; 2 ; 2).

- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
- Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par les trois points A, B et C est $x + y + z - 6 = 0$.
- Soit (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (AB).
 - Déterminer une équation de (Q).
 - On désigne par (D) la droite d'intersection de (P) et (Q). Démontrer que (D) est parallèle à (BC).
- Soit H (5; 3; 1) un point de (Q).
 - Démontrer que A est le projeté orthogonal de H sur (P).
 - Calculer le volume du tétraèdre HABC.

Question 3. (10 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, M et M' les points d'affixes respectives 1, 2, 3, z et z' tel que $z' = \frac{\bar{z}-3}{\bar{z}-2}$ où $z \neq 2$ et M distinct de B.

- Déterminer l'ensemble des points M si $|z'| = 1$.
- Vérifier que $z' - 1 = \frac{-1}{\bar{z}-2}$.
 - Déduire que $AM' \times BM = 1$.
- Supposons que $z = 2 + e^{i\theta}$, avec $\theta \in]-\pi; \pi[$. Ecrire $z' - 1$ sous forme exponentielle.

4) Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a- Vérifier que $x' = \frac{x^2+y^2-5x+6}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \frac{-y}{(x-2)^2+y^2}$.

b- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est imaginaire pure.

c- Déterminer l'ensemble des points M' tel que M décrit la droite d'équation $x = 2$.

Question 4. (10 points)

Une urne U contient dix boules :

- Cinq boules blanches numérotées 1, 2, 3, 4, 5
- Trois boules noires numérotées 6, 7, 8
- Deux boules vertes numérotées 9, 10

Partie A : Un joueur tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U . On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées ont des numéros impairs »,

B : « les deux boules tirées ont la même couleur »,

C : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et ont la même couleur »,

D : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et sont de couleurs différentes ».

1) Calculer la probabilité $P(A)$ et vérifier que $P(B) = \frac{14}{45}$.

2) a- Calculer $P(C)$.

b- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

3) Vérifier que $P(D) = \frac{7}{45}$.

4) Sachant que le joueur a tiré deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité que ces deux boules portent des numéros impairs ?

Partie B : Dans cette partie, le joueur tire successivement, au hasard et avec remise, deux boules de l'urne U . A chaque boule blanche tirée il marque **+1** point, à chaque boule noire tirée il marque **-1** point et à chaque boule verte tirée il marque **0** point. Calculer la probabilité que la somme des points marqués soit égale à zéro.

N.B : La question 5 est obligatoire.

Question 5. (20 points)

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = -2 + xe^{-x+1}$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .

3) Dédurre le signe de $g(x)$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -2x + 3 - xe^{-x+1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (d) la droite d'équation $y = -2x + 3$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)]$ et déduire que la droite (d) est une asymptote à (C) .

b- Étudier, suivant les valeurs de x , la position relative entre (C) et (d) .

3) Vérifier que $f'(x) = g(x) - e^{-x+1}$, puis dresser le tableau de variations de f .

4) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5) Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis tracer (C) et (d) .

6) a- Montrer que $\int xe^{-x+1} dx = -(x+1)e^{-x+1} + K$.

b- Calculer l'aire du domaine limitée par la courbe (C) , la droite (d) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.