



Concours d'entrée (Génie)
Examen de Mathématique
Barème/50

11 Septembre 2024

Durée : 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4 (la question 5 est obligatoire)

Question 1. (10 points)

Dans le tableau suivant, une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1	Pour tout nombre réel $a > 0$, $\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+4}+2}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+4}-2}\right) =$	0	1	e
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x^2)}{\ln(x^2-4x+3)}$	e^{-1}	1	$+\infty$
3	Si $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ alors $f'(e^{-1}) + f(e) =$	$e - 2$	e	0
4	Le domaine de définition de la fonction $h(x) = \ln(e^{x-1} - 1) - \frac{x}{x-2}$ est :	$]1; 2[$	$] -\infty; +\infty [$	$]1; 2 [\cup]2; +\infty [$
5	Un clavier d'entrée de sécurité d'un bâtiment est composé de trois lettres A, B et C et de cinq chiffres 1, 2, 3, 4 et 5. Le code d'entrée est composé d'une lettre suivie d'un nombre constitué de 3 chiffres distincts. Le nombre de codes possibles est :	15	180	375

Question 2. (10 points)

Une urne contient 5 boules blanches et 2 boules noires.

Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs :

- Au premier tirage, on tire au hasard une boule. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne ; sinon on la laisse en dehors de l'urne.
- Au second tirage, on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- B : « la boule tirée au premier tirage est blanche » ;
- E : « les deux boules tirées au second tirage sont blanches » ;
- F : « les deux boules tirées au second tirage sont noires » ;
- G : « les deux boules tirées au second tirage sont de couleurs différentes ».

1) Calculer $p(E/B)$ et $p(E/\bar{B})$. Dédurre que $p(E) = \frac{26}{49}$.

2) Calculer $p(F)$ et $p(G)$.

3) Sachant que les deux boules tirées au second tirage ont la même couleur, calculer la probabilité que la boule tirée au premier tirage soit noire.

- 4) Dans cette partie, on marque **-3** points pour chaque boule noire tirée et **+5** points pour chaque boule blanche tirée.

On note **S** la somme des points marqués pour les deux boules obtenues au second tirage.

Calculer la probabilité que **S** soit positive.

Question 3. (10 points)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme réel de degré ≤ 2 . Trouver trois nombres réels α , β et γ tels que :

$$\int_3^6 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) .$$

Question 4. (10 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u} \vec{v})$, on désigne par A, B, M et M' les points d'affixes respectives i , 1 , z et z' tel que $z' = \frac{z-1}{z-i}$ ($z \neq i$).

- 1) Dans le cas où $z = 1 + 2i$, écrire z' sous forme exponentielle.
- 2) Montrer que $\arg(z') = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})[2\pi]$. Déduire l'ensemble des points M lorsque z' est réel.
- 3) a-Montrer que $(z' - 1)(z - i) = -1 + i$. Déduire que $AM \times BM' = \sqrt{2}$.
b-Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle de centre A et de rayon 2.
- 4) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
a- Montrer que $x' = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $y' = \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$.
b- Lorsque M' se déplace sur la droite d'équation $y = x$, montrer que M varie sur un cercle de centre et de rayon à déterminer.

(N.B : la question 5 est obligatoire)

Question 5. (20 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = xe^x - 1$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine unique α sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $0,5 < \alpha < 0,58$.
- 4) Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (x - 1)(e^x - 1)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et calculer $f(2)$.
- 2) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et prouver que la droite (d) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C).
b- Étudier, suivant les valeurs de x , la position relative entre (C) et (d).
- 3) Vérifier que $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 4) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
- 5) Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (d).
- 6) Vérifier que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$.
- 7) Tracer (C) et (d). (Prendre $\alpha = 0,57$)
- 8) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$, par : $F(x) = (x - 2)e^x$.
a- Montrer que F est une primitive de $f(x) + x + 1$
b- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limitée par (C) , (d) et les deux droites $x = 0$ et $x = 1$.