

Concours d'entrée (TSG)
Examen de Mathématique

25 Septembre 2023

Durée : 2 heures

N.B : Choisir trois questions parmi les questions 1, 2, 3 et 4 (la question 5 est obligatoire)

Question 1. (10 points)

Dans le tableau suivant une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	La solution de l'équation $C_{3n}^2 = A_n^2 + 30$ est :	2	3	4
2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e-3x)}{\ln(1-x)} =$	$+\infty$	e	1
3	L'équation $\ln^2 x - 2\ln\left(\frac{e}{x}\right) + 3$ admet	Une solution	Deux solutions	Aucune solution
4	Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - \ln(x))$ est :	$] -\infty, e[$	$] 0, e[$	$] 0, +\infty[$
5	Si $2p(A) = p(B) = \frac{5}{13}$ et $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$ alors $p(\overline{A} \cap \overline{B}) =$	$\frac{10}{26}$	$\frac{11}{26}$	$\frac{15}{26}$

Question 2. (10 points)

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une urne U contenant **deux boules** portant des nombres strictement **positifs** et **trois boules** portant des nombres strictement **négatifs**.

Le dé est lancé :

- Si le nombre apparu sur le dé est 1 ou 2, on tire simultanément et au hasard **deux boules** de l'urne U.
- Si le nombre apparu sur le dé est 3, 4, 5 ou 6, on tire simultanément et au hasard **trois boules** de l'urne U.

On considère les événements suivants :

A : « Le nombre apparu sur le dé est 1 ou 2 ».

B : « Le nombre apparu sur le dé est 3, 4, 5 ou 6 ».

C : « Le **produit** des nombres portés par les boules tirées de l'urne U est **négatif** ».

1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

2) a- Montrer que $p\left(\frac{C}{A}\right) = 0,6$ et en déduire $p(C \cap A)$.

b- Montrer que $p\left(\frac{C}{B}\right) = 0,4$ et en déduire $p(C \cap B)$.

c- Calculer $p(C)$.

- 3) Le **produit** des nombres portés par les boules tirées de l'urne U est **positif**, quelle est la probabilité que le nombre apparu sur le dé soit 1 ou 2 ?

Question 3. (10 points)

Supposons que vous travaillez sur la conception d'un réseau électrique pour une installation industrielle. Vous avez trois types de composants électriques : des transformateurs, des disjoncteurs et des condensateurs. Vous devez installer un total de 30 composants électriques dans le réseau. Les transformateurs coûtent 500 \$ chacun, les disjoncteurs coûtent 100 \$ chacun et les condensateurs coûtent 50 \$ chacun. De plus, le nombre total de condensateurs et de disjoncteurs est égale au nombre de transformateurs. Vous avez un budget total de 8500 \$ pour le projet.

Soit x , y et z respectivement le nombre de transformateurs, de disjoncteurs et de condensateurs.

- 1) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le texte ci-dessus.
- 2) En résolvant le système précédent, déduire le nombre de composant électrique de chaque type que vous devez utiliser pour cette installation.

Question 4. (10 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par E , A , et M les points d'affixes respectives $2i$, $-i$, z et soit M' le point d'affixe z' tel que $z' = 2i - \frac{2}{z}$ ($z \neq 0$).

- 1) a- Montrer que $z(z' - 2i) = -2$.
b- Calculer $\arg(z) + \arg(z' - 2i)$.
- 2) a- Vérifier que $z' = \frac{2i(z+i)}{z}$, et déduire que $OM' = \frac{2AM}{OM}$.
b- Montrer que si M se déplace sur la médiatrice de $[OA]$ alors M' se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x , y , x' et y' sont des réels.
a- Montrer que $x' = \frac{-2x}{x^2 + y^2}$ et $y' = 2 + \frac{2y}{x^2 + y^2}$
b- Montrer que si $x = y$ alors les droites (OM) et (EM') sont perpendiculaires.

N.B : La questions 5 est obligatoire**Question 5. (20 points)****Partie A :**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = -1 - (x+1)e^{-x}$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α et vérifier que $-1,3 < \alpha < -1,2$.
- 4) Discuter, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -x + (x+2)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $f(-2,5)$ à 10^{-2} près.
- 2) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et prouver que la droite (d) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C)
b- Étudier la position relative entre (C) et (d) .
- 3) Vérifier que $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 4) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha - 2}{\alpha + 1}$.

6) Tracer (d) et (C) (prendre $\alpha = -1,28$).

Partie C :

On considère la fonction h définie par $h(x) = \ln[f(x) - 2]$, et on désigne par (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Trouver le domaine de définition de h .
- 2) Trouver l'abscisse du point A de (H) où la tangente à (H) en A est parallèle à l'axe des abscisses.