

Concours d'entrée (Génie)  
Examen de Mathématique

15 Septembre 2022

Durée : 2 heures

***N.B : Les questions 1, 2 et 3 sont obligatoires (les questions 4 et 5 sont au choix)***

**Question 1. (8 points)**

Dans le tableau suivant une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| N° | Questions  | Réponses                   |                            |                      |
|----|--|----------------------------|----------------------------|----------------------|
|    |  | a                          | b                          | c                    |
| 1  | La solution de l'équation :<br>$\ln(3x + 4) + \ln(-2x + 6) = \ln 5 + \ln 4$ est                                    | $\frac{-1}{3}$             | 2                          | $\frac{-1}{3}$ ou 2  |
| 2  | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{e^{2x}}{x} \right) =$   | $+\infty$                  | $-\infty$                  | 1                    |
| 3  | La dérivée de la fonction f définie par :<br>$f(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x}$ est                                     | $\frac{2 - 2e^x}{(e^x)^2}$ | $\frac{2e^x - 2}{(e^x)^2}$ | $\frac{2x - 2}{e^x}$ |
| 4  | Le domaine de définition de la fonction h définie par :<br>$h(x) = \ln \left( \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$ est | $] -\infty, 0[$            | $] -\infty, +\infty[$      | $] 0, +\infty[$      |

**Question 2. (12 points)**

Un magasin de vêtements vend uniquement des robes décontractées et formelles. Les clientes de ce magasin sont interrogées et les résultats sont les suivants :

- 30 % de ces clientes ont acheté chacune une robe décontractée.
- Parmi ceux qui ont acheté une robe décontractée, 60 % ont acheté une robe formelle.
- 28 % des clientes ont acheté chacune une robe formelle.

Une cliente de ce magasin est choisie au hasard. On considère les événements suivants :

C : « la cliente interrogée a acheté une robe décontractée ».

F : « la cliente interrogée a acheté une robe formelle ».

**Partie A :**

- 1) Calculer la probabilité  $P(C \cap F)$  et vérifier que  $P(C \cap \bar{F}) = 0,12$ .
- 2) Prouver que  $P(\bar{C} \cap \bar{F}) = 0,6$ .
- 3) Calculer la probabilité que la cliente ait acheté au moins une robe.
- 4) Sachant que la cliente n'a pas acheté de robe formelle, calculer la probabilité qu'elle ait acheté une robe décontractée.

### **Partie B :**

Dimanche, 30 clientes ont visité ce magasin. On choisit simultanément et au hasard trois de ces clientes. On considère les événements suivants :

A : « parmi les trois clientes choisies, exactement une a acheté une robe décontractée ».

B : « parmi les trois clientes choisies au plus deux ont acheté une robe décontractée ».

1) Vérifier que  $P(A) = \frac{27}{58}$ .

2) Calculer  $P(B)$ .

### **Question 3. (25 points)**

**Partie A :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$ , par :  $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2) Calculer  $g'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $g$ .

3) Calculer  $g(1)$ , puis discuter suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $g(x)$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ , par :  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$  et on désigne par  $(C)$  sa

courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $(d)$  la droite d'équation :  $y = x$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et déduire une asymptote  $(C)$ .

2) Discuter suivant les valeurs de  $x$ , la position relative de  $(C)$  et  $(d)$ .

3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que la droite  $(d)$  est une asymptote à  $(C)$ .

4) Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

5) Déterminer le point  $E$  de  $(C)$  où la tangente  $(T)$  à  $(C)$  est parallèle à  $(d)$ .

6) Tracer  $(d)$  et  $(C)$ .

**N.B : Choisir l'une des deux questions 4 ou 5**

### **Question 4. (5 points)**

Une salle de cinéma a une capacité de 350 places assises. Le théâtre facture 4,50 \$ pour les enfants, 7,50 \$ pour les étudiants et 12,50 \$ pour les adultes. Il y a deux fois moins d'adultes que d'étudiants. Le total des ventes de billets était de 2415 \$. Soit  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement les nombres d'enfants, d'étudiants et d'adultes.

1) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le texte ci-dessus.

2) En résolvant le système précédent, déterminer le nombre d'enfants, d'étudiants et d'adultes présents.

### **Question 4. (5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par  $A$ ,  $B$ , et  $M$  les

points d'affixes respectives  $-i$ ,  $-2$ ,  $z$  et soit  $M'$  le point d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{1-iz}{z+2}$  ( $z \neq -2$ ).

1) a- Trouver la forme algébrique du nombre complexe  $(z'+i)(z+2)$ .

b- Donner une interprétation géométrique de  $|z'+i|$  et  $|z+2|$ , puis déduire que  $AM' \times BM = \sqrt{5}$ .

c- Démontrer que, lorsque  $M$  se déplace sur le cercle de centre  $B$  et de rayon 1,  $M'$  se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2) On suppose que  $z = -2 + iy$  où  $y$  est un réel non nul.

a- Trouver, en fonction de  $y$ , la forme algébrique de  $z'$ .

b- Déterminer le point  $M$  pour lequel  $z'$  est réel.