Université Libanaise
Faculté de Technologie

الجامعة اللبنانيّة
كلية التكنولوجيا

Concours d'entrée (Génie)
Examen de Mathématique

15 Septembre 2021 **Durée : 2 heures**

N.B : Les questions 1, 2 et 3 sont obligatoires (les questions 4 et 5 sont au choix)

Question 1. (8 points)

Dans le tableau suivant une seule réponse parmi les réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Pour tout réel x, on a : $\ln\left(1+e^{-x}\right)-\ln\left(1+e^{x}\right)=$	0	-x	x
2	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}=$	$+\infty$	1	e
3	Soit f la fonction donnée par : $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x^{2}+1\right)}{\ln\left(x\right)}$ Le domaine de définition de f est :	$\left]-\infty;+\infty\right[$	$\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$	$\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$
4	Si A et B sont deux événements tels que $P\left(A\right)=0,4$, $P\left(B\right)=0,8$ et $P\left(B/A\right)=0,6$ alors $P\left(A\cup B\right)$ est égale à	0,24	0,96	0,48

Question 2. (9 points)

On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient deux boules numérotées 1 et 2 et l'urne V contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.

1) On choisit au hasard une des deux urnes, puis on tire au hasard une boule de l'urne choisie. On considère les événements suivants :
   - U : « l'urne choisie est U ».
   - N : « la boule tirée porte le numéro 1 ».

   a- Calculer les probabilités $P\left(N/U\right)$ et $P\left(N\cap U\right)$.

   b- Montrer que $P\left(N\right)=\dfrac{3}{8}$ et déduire $P\left(U/N\right)$.

2) Dans cette partie, les six boules des deux urnes U et V sont placées dans une urne W. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne W. On considère les évènements suivants :
   - E : « les deux boules tirées portent le même numéro ».
   - F : « la somme des numéros portés par les deux boules est impaire ».

   a-Vérifier que $P\left(E\right)=\dfrac{2}{15}$.

   b- Calculer $P\left(F\right)$ et $P\left(F/\overline{E}\right)$.

Question 3. (8 points)

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) a- Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

   b- Déduire que $g(x)>0$ pour tout x réel.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=xe^{-x}+x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2) Montrer que la droite (d) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C).
3) Étudier la position relative de (C) par rapport à (d).
4) a- Vérifier que $f'(x)=g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

   b- Montrer que $I\left(2,\ 2+\frac{2}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de (C).

   c-Déterminer le point E de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d).

   d- Tracer (d), (T) et (C).

5) Calculer l'aire A, du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

N.B : Choisir l'une des deux questions 4 ou 5

Question 4. (8 points)

Une usine fabrique chaque jours trois modèles des cartes vidéo d'ordinateurs : le modèle C1, le modèle C2 et le modèle C3. On installe à l'intérieur de chaque modèle des puces électroniques des types : P1, P2 et P3 avec la répartition suivante :

Modèle / Puce	C1	C2	C3
P1	5	2	7
P2	3	8	6
P3	3	4	5

Un certain jour, on utilise : 200 puces P1, 240 puces P2 et 170 puces P3.
Soient x, y et z les nombres respectifs des cartes C1, C2 et C2 fabriquées.

1) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le texte ci-dessus.
2) En résolvant le système précédent, déduire le nombre de cartes fabriquées de chaque modèle.

Question 4. (8 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, et M les points d'affixes respectives -1, 4, z et soit M' le point d'affixe z' tel que $z'=\frac{z-4}{z+1}\quad(z\neq-1)$.

1) Dans le cas où $z=1+i$, écrire z' sous forme algébrique et donner sa forme exponentielle.
2) Déterminer les valeurs de z lorsque z' = z.
3) a- Donner une interprétation géométrique de $|z+1|$ et $|z-4|$.

   b- Trouver sur quelle ligne se déplace le point M lorsque $|z'|=1$.