Université Libanaise
Faculté de Technologie

الجامعة اللبنانيّة
كلية التكنولوجيا

Concours d'entrée (Génie)
Examen de Mathématique

17 Septembre 2020 **Durée : 2 heures**

N.B : Les questions 1,2,3 sont obligatoires :

Exercice 1. (28 points)

Part A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x + \ln(x)$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$
2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
3) a- Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine unique α, puis vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

   b- Discuter suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

Part B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x(2\ln x + x - 2)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et calculer f (e).
2) Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 2)$.
3) Vérifier que $f'(x) = 2g(x)$ et dresser le tableau de variations de f(x).
4) Tracer (C). (On prendra $\alpha = 0,55$).
5) Utiliser une intégration par parties pour calculer $\int_{0,5}^{1} x\ln x\,dx$ et déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x=0,5 et x =1.

Exercice 2. (14 points)

Une boite V contient des cartes :

- 20% des cartes sont bleues et les autres sont rouges ;
- 40% des cartes bleues portent des numéros impairs ;
- 32% des cartes de la boite portent des numéros impairs.

1) On tire au hasard une carte de la boite V.

   On considère les évènements suivants :

   B : « tirer une carte bleue »

   R : « tirer une carte rouge »

   I : « tirer une carte portant un numéro impair »

   a- Calculer la probabilité $p(I \cap B)$ et vérifier que $p(I \cap R) = 0,24$.

   b- Déduire $p\left(I/R\right)$

   c- La carte tirée ne porte pas un numéro impair, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2) Dans cette partie on suppose qu'il y a 50 cartes dans la boite V.

   On tire simultanément et au hasard trois cartes de V et on considère les évènements suivants :

   M : « parmi les trois cartes tirées, exactement deux portent des numéros impairs »

   N : « les trois cartes tirées sont bleues »

   L : « parmi les trois cartes tirées, exactement deux portent des numéros impairs et une est bleue »

Calculer $p(M)$; $p\left(N/M\right)$ et $p(L)$.

Exercice 3. (10.5 points)

Rami retire au guichet de sa banque la somme de 725\$. Le guichet lui remet 45 billets, dont :

- Des billets de 5\$
- Des billets de 10\$
- Des billets de 20\$

A la sortie de la banque, Rami se rend dans un magasin. Après son passage en caisse, il lui reste la moitié du nombre de billets de 10\$ et la moitié du nombre de billets de 20\$, et toujours le même nombre de billets de 5\$ et une somme totale de 375\$.

1) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le texte ci-dessus.
2) En résolvant le système précédent, déterminer le nombre des billets de 5\$, 10 \$ et de 20 \$ qui restent avec Rami après avoir quitté le magasin.

__N.B : Choisir l'un des deux questions 4 ou 5 :__

__Exercice 4. (17.5 points)__

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation : $x-2y+2z-6=0$ et les deux droites (d) et (d') définies par :

$(d):\begin{cases} x=m+1 \\ y=2m+1 \\ z=2m+2 \end{cases}$ et $(d'):\begin{cases} x=2t \\ y=5t-3 \\ z=4t \end{cases}$ (m et t sont deux paramètres réelles)

1) Trouver les coordonnées du point A intersection de la droite (d) et du plan (P).
2) Vérifier que le point A appartient à la droite (d') et que la droite (d') est contenue dans le plan (P).
3) a- Ecrire une équation du plan (Q) formé par les deux droites (d) et (d').

   b- Montrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
4) Soit $B(1;1;2)$ un point de (d).

   Calculer la distance du point B à la droite (d').

__Exercice 5. (17.5 points)__

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M et M′ les points d'affixes respectives 2, -i, z et z′ tels que $z'=\dfrac{iz-1}{z-i}$ avec $z\neq i$.

1) Trouver les coordonnées de M lorsque $z'=1+2i$.
2) Donner une interprétation géométrique de $|z-1|$, $|iz-1|$ et déterminer l'ensemble des points M tels que $|z-1|=|iz-1|$.
3) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x, y, x' et y' sont des réels)

   a- Calculer x' et y' en fonction de x et y.

   b- Montrer que lorsque z' est imaginaire pur, M se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.

   c- Montrer que lorsque z est réel, M'se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.