Université Libanaise
Faculté de Technologie

الجامعة اللبنانيّة
كلية التكنولوجيا

Concours d'entrée (Génie)
Examen de Mathématique

24 Juillet 2018 **Durée : 2 heures**

N.B : Toutes les questions sont obligatoires.

Exercice 1 (10 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation: $x+y+z-1=0$, la droite (d) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=-m-1 \\ y=m+5 \\ z=3m+9 \end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$,

et H (1, 1, -1) un point de (P).

1) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (d) et (P).
2) Soit (Δ) la droite passant par H et perpendiculaire à (P).
   a- Ecrire un système d'équations paramétriques de (Δ).
   b- Vérifier que E (2, 2, 0) est le point d'intersection de (Δ) et (d).
3) Soit (Q) le plan qui passe par les deux points O et F (2, 1,0), et perpendiculaire à (P).
   a- Ecrire une équation du plan (Q).
   b- Soit M(x,y,z) un point variable de (Q). Montrer que le volume du tétraèdre MEAH est constant.

Exercice 2. (10 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M et M′ les points d'affixes respectives -2, i, z et z′ tels que $z'=\dfrac{z+2}{z-i}$.

1) Dans cette question seulement, on suppose que $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   a- Ecrire le nombre complexe $-1-i$ sous forme exponentielle.
   b- Déduire que $(z')^{40}$ est un réel.
2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x′ et y′ sont des nombres réels.
   a- Calculer x′ et y′ en fonction de x et de y.
   b- Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et y.
   c- Déduire que si z' est imaginaire pur alors les deux droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.
3) a- Vérifier que $(z'-1)(z-i)=2+i$.

b- Déduire que si M se déplace sur le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors M' varie sur un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 3. (10 points)

On dispose d'une urne U contenant trois dés:

- **DEUX** dés rouges, dont les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
- **UN** dé noir, dont deux faces sont numérotées 6 et les quatre autres sont numérotées 1.

Un joueur tire au hasard et simultanément deux dés de l'urne puis les lance une seule fois. On considère les évènements suivants:

A : « Tirer deux dés rouges ».

$\overline{A}$: « Tirer deux dés un rouge et un noir ».

L : « Obtenir exactement une seule face numérotée 6 ».

1) Calculer la probabilité $p(A)$.
2) a- Vérifier que $p(L/A)=\frac{5}{18}$ et calculer $p(A\cap L)$

   b- Calculer $p(\overline{A}\cap L)$ et vérifier que $p(L)=\frac{19}{54}$.
3) Sachant qu'on a obtenu exactement une seule face numérotée 6, calculer la probabilité d'avoir tiré deux dés rouges.
4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une face numérotée 6.

Exercice 4. (20 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et calculer $f(-2)$.

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
2) Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.
3) La droite (d) d'équation $y=x$ coupe (C) en un point d'abscisse α.
   Vérifier que $1{,}4<\alpha<1{,}5$.
4) Tracer (d) et (C).
5) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=(px^2+qx+r)e^{-x}$
   a- Calculer p, q et r pour que la fonction F soit une primitive de f.
   b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
6) Montrer que la fonction f admet sur $[1;+\infty[$ une fonction réciproque f^{-1}. Préciser le domaine de définition de f^{-1} et tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C).