UNIVERSITE LIBANAISE
Institut Universitaire de Technologie

الجامعة اللبنانية
المعهد الجامعي للتكنولوجيا

Concours d'entrée : 10 Septembre 2014
Mathématiques : GC - GIM – GRIT **Durée : 2heures**

N.B. : Toutes les questions sont obligatoires

Exercice 1. (12 Pts)

Dans une entreprise il y a 20 employés répartis dans deux départements selon le tableau suivant :

	Département technique	Département administratif
Femmes	3	5
Hommes	10	2

1) Le directeur de l'entreprise veut offrir un cadeau à l'un des employés; pour cela il choisit au hasard un employé de cette entreprise. On considère les événements suivants :

F : « l'employé choisi est une femme ».

H : « l'employé choisi est un homme ».

T : « l'employé choisi est du département technique ».

A : « l'employé choisi est du département administratif ».

a- Calculer les probabilités suivantes : $P(F / T)$, $P(F / A)$, $P(F \cap T)$ et $P(F)$.

b- Sachant que l'employé choisi est un homme, quelle est la probabilité qu'il soit du département technique ?

2) Dans une autre occasion, le directeur de l'entreprise choisit au hasard et simultanément **deux** employés du département technique et il choisit aussi au hasard **un** employé du département administratif.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de femmes choisies.

a- Vérifier que $P(X = 1) = 95/182$.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2. (12 Pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x-1)e^x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner f(2) sous forme décimale.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.

4) Tracer (d) et (C).

5) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 3. (10 Pts)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in IR$ sont les fonctions g définies sur IR par : $g(x) = Ke^{ax}$ où $K \in IR$. On cherche à déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in IR^*$ et $b \in IR$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur IR par $u(x) = \frac{-b}{a}$ est solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur IR. Démontrer que si f est solution de (E) alors (f–u) est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toute les solutions de (E).

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde. On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10\,v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle $[v(0) = 0]$.

4. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - e^{\frac{-t}{10}}\right)$.
5. a) Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
6. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par : $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

Exercice 4. (8 Pts)

Dans un repère orthonormé direct du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Construire les points A, B, C et D.
3. Déterminer le milieu du segment [AC] et celui du segment [BD].
   Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 5. (10 Pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(1,2,3), B(0,1,4), C(-1,-3,2), D(4,-2,5) et le vecteur $\vec{n}$ (2,-1,1).

1. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déterminer une équation du plan (ABC).
4. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in IR$.
   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 6. (4 Pts)

La distance entre Saida et Beyrouth est de 45km. Celle de Beyrouth à Tripoli est de 90Km.
Deux voitures A et B partent en même temps de Saida et de Beyrouth vers Tripoli.

1. Quel doit être la relation entre les vitesses des voitures pour arriver en même temps à Tripoli.
2. Sachant que les deux trajets ont duré deux heures chacun, donner les vitesses de chaque voiture ?

Exercice 7. (4 Pts)

La somme de deux nombres est 20. Leur produit est 96. Déterminer ces deux nombres. Expliquer.